АНОТАЦІЯ

Козловський М.Р. Необхідні і достатні умови на множину точок розриву нарізно неперервних функцій. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 111 Математика – Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, 2025.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню необхідних і достатніх умов на множину точок розриву нарізно неперервної функції двох і більше змінних. Історія вивчення множини точок розриву нарізно неперервних функцій бере початок з класичних робот Рене Бера на Анрі Лебега кінця IXX століття. Подальший розвиток цих досліджень проводився багатьма математиками і привів до виникнення теорії нарізно неперервних відображень. Починаючи з 80-х років XX століття за ініціативи і під керівництвом Володимира Маслюченка дослідження нарізно неперервних функцій стали активно проводитись у Чернівецькому національному університеті.

Незважаючи на отримані раніше результати, теорем, які повністю характеризують множину точок розриву нарізно неперервних відображень на добутку просторів з певного класу, не так уже й багато і вони дають лише не дуже далекий вихід за межі випадку добутку метризовних просторів. Це вказує на те, що подальший розвиток даних досліджень є актуальним, адже нерозв'язаними залишаються задачі про повний опис множин точок розриву нарізно неперервних відображень на добутку абстрактних просторів.

Дисертація складається із вступу, 6 розділів, висновків, списку використаної літератури і двох додатків. Розділи поділяються на підрозділи, за виключенням першого розділу, також у розділах починаючи від другого, в кінці розділі надаються висновки до розділу.

У вступній частині вказано актуальність теми, мету, завдання дисертації, предмет і об'єкт. Також вказані методи дослідження, відомості про апробацію, публікації. Описано структуру і зміст дисертації.

Перший розділ присвячений огляду тематики досліджень. В цьому розділі наведені історичні відомості про основні етапи формування теми дослідження. Також вказані основні досягнення, відкриті питання, а також результати, на яких базуються результати в подальших розділах.

Другий розділ присвячений наведенню означень основних понять і деяких відомих результатів, які використовуються надалі. Розділ поділений на три підрозділи. У підрозділі 2.1 надаються деякі основні означення і властивості, які стосуються загальної теорії функцій, а також наводяться такі відомі теореми, як теорема Стоуна, лема Урисона та інші. У підрозділі 2.2 дається означення компактифікації Стоуна-Чеха і описуються деякі її властивості. У підрозділі 2.3 даються означення і описуються властивості таких понять: фільтри, P-фільтри, майже когерентність фільтрів.

Третій розділ присвячений розв'язанню спеціальної оберненої задачі із несиметричними умовами на простори. Спочатку у підрозділі 3.1 вводиться нове поняття регулярної множини і вивчаються властивості регулярних множин. Зокрема, доводиться твердження 3.1.8 про те, що кожна замкнена ніде не щільна множина у метризовному просторі є регулярною. Далі у підрозділі 3.2 дається ще одне нове поняття – двосторонньо сеперабельної множини і доводяться деякі властивості таких множин. В тому числі доводиться, що кожна функціонально замкнена двосторонньо сепарабельна множина є регулярною. В підрозділі 3.3 здійснюється побудова нарізно неперевної функції $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ із даною множиною точок розриву $A \times B$, де A – регулярна множина в просторі X, а B – функціонально замкнена ніде не щільна в просторі Y. В тому числі, в даному підрозділі доводиться наслідок 3.3.2, який узагальнює всі раніше одержані розв'язання спеціальної оберненої задачі. У підрозділі 3.4 розглядається спеціальна обернена задача на добутку компактифікацій Стоуна-Чеха $\beta\omega \times \beta\omega$. Зокрема отримується твердження про те, що наріст ω^* не є регулярною множиною в просторі $\beta\omega$. Окрім того, доводиться теорема про те, що не існує нарізно неперевної функції на добутку $\beta\omega \times \beta\omega$ із множиною точок розривів $\omega^* \times \omega^*$.

У четвертому розділі вивчається необхідні та достатні умови на існування нарізно неперервної функції на добутку n компактних просторів із одноточковою множиною розривів. Результати даного розділу узагальнюють результати В.Михайлюка про нарізно неперервні функції двох змінних. У підрозділі 4.1 дається поняття нарізно неперервної функції відносно груп змінних і сильно нарізно неперервної функції багатьох змінних. Для функції двох змінних поняття сильно нарізно неперервної функції тотожне із поняттям нарізно неперервної функції, проте для функцій більшої кількості змінних поняття сильно нарізно неперевної функції є сильнішим. У підрозділі 4.2 ми встановлюєсо необхідність неізольованості точок для існування нарізно неперевної і сильно нарізно неперевної функції із одноточковим розривом. У підрозділі 4.3 вивчаються необхідні і достатні умови існування нарізно неперервних чи сильно нарізно неперервної функції багатьох змінних із одноточоковим розривом. Основним результатом цього підрозділу і загалом розділу є теорема 4.3.4 про те, що існування сильно нарізно неперервної чи нарізно неперервної функції $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to [0,1]$ із $D(f) = \{(x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,n})\}$, де X_k – компактний гаусдорфовий простір і $x_{0,k}$ – неізольована точка в X_k для довільного $1 \le k \le n$, рівносильне тому, що існує послідовність $(U_m)_{m=1}^{\infty}$ непорожніх відкритих множин U_m в просторі $X = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ така, що $U_m \to \mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,n})$.

П'ятий підрозділ присвячений одержанню необхідних у достатніх умов на існування сильно нарізно неперервної функції на добутку n цілком регулярних просторів із одноелементною G_δ-множиною точок розриву. Основний результат даного розділу узагальнює відповідний результат Т.Банаха, О.Маслюченка та В.Михайлюка про нарізно неперервні функції двох змінних, який формулюється у термінах майже когерентності P-фільтрів. В підрозділі 5.1 ми розглядаємо деякі властивості фільтрів і P-фільтрів з множини $\mathcal{F}$ усіх фільтрів на множині $\mathbb{N}$, які інваріантні відносно множини зі скінченною різницею. Основний результатом даного підрозділу є твердження про те, що умова майже когерентності довільних n P-фільтрів рівносильна умові майже когерентності довільних двох фільтрів. Далі в підрозділі 5.2 ми вводимо поняття сильно нарізно скінченної множини і отримуємо деякі її властивості. В підрозділі 5.3 ми розглядаємо неперервність сильно нарізно неперервних функцій на добутку спеціальних просторів $\mathbb{N}_u$ і отримуємо теорему про те, що якщо $x_1, ..., x_n$ – це P-фільтри, які не є майже когерентними, то кожна сильно нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{x_i} \to \mathbb{R}$ є неперервною. Це означає, що майже когерентність фільтрів є необхідною умовою для існування відповідної сильно нарізно неперервної функції із одноточковим розривом. В підрозділі 5.4 ми вивчаємо існування розривних сильно нарізно неперервних функцій на добутку просторів $\mathbb{N}_{x_k}$ і отримуємо, що за певних умов на фільтри $x_1, ..., x_n$ існує множина $H \subset \mathbb{N}^n$ така, що її характеристична функція є сильно нарізно неперервною і розривною у точці $(x_1, ..., x_n)$. В підрозділі 5.5 ми доводимо основний результат даного розділу про те, що умова майже когерентності двох P-фільтрів є необхідною і достатньою для існування сильно нарізно неперервної функції $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$, де $X_1, ..., X_n$ – цілком регулярні простори, x_{i0} неізольована G_δ-точка у просторі X_i для кожного $i \leq n$.

В шостому розділі вивчається аналогічне, як в п'ятому, питання про одноточкові розриви нарізно неперервних функцій n змінних. У підрозділі 6.1 отримується твердження про те, що якщо існує нарізно неперервна функція $f : \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{x_i} \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$, де $x_1, ..., x_n$ – P-фільтри із $\mathcal{F}$, тоді із P-фільтрів $x_1, ..., x_n$ можна вибрати два, які є майже когерентними. Тобто умова того, що із P-фільтрів $x_1, ..., x_n$ можна вибрати два, які є майже когерентними є необхідною для існування відповідної нарізно неперервної функції. Далі у підрозділі 6.2 показується, що дана умова достатня для існування нарізно неперервної $f : \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{x_i} \to \mathbb{R}$ з $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$, де $x_1, ..., x_n$ – фільтри із $\mathcal{F}$. Нарешті у підрозділі 6.3 для того щоб перенести достатність даної умови на випадок довільних цілком регулярних просторів, дається твердження, яке показує існування нарізно неперервної функції $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ із $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$, де $X_1, ..., X_n$ – цілком регулярні простори, x_{i0} – неізольована G_δ-точка у просторі X_i, якщо для деяких $1 \leq k < m \leq n$ існує нарізно неперервна функція $g : X_k \times X_m \to \mathbb{R}$ така, що $D(g) = \{(x_{k0}, x_{m0})\}$. Далі одержується теорема 6.3.4 – основний результат даного розділу, який твердить, що існування нарізно неперервної функції $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ з даною одноелементною множиною точок розриву $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$, де $(X_i)_{i=1}^{n}$ – набір довільних цілком регулярних просторів, $(x_i)_{i=1}^{n}$ – неізольовані G_δ-точки у відповідних просторах, є рівносильним тому, що з довільних n P-фільтрів з $\mathcal{F}$ можна вибрати два, які є майже когерентними.

Після останнього розділу надається основні висновки до результатів у дисертації.

Ключові слова: функція, відображення, топологія, неперервність, збіжність, топологічний простір, цілком регулярний простір, метричний простір, метризовний простір, компактність, компактний простір, компактифікація, добуток, нарізно неперервна функція, збіжна послідовність.

ABSTRACT

Kozlovskyi M. Necessity and sufficiency conditions for the discontinuity points set of separately continuous functions. – Qualification scientific work in the form of manuscript.

Thesis for doctor of philosophy degree in speciality 111 Mathematics – Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi, 2025.

The thesis is devoted to the study of necessary and sufficient conditions for the discontinuity points set of a separately continuous function of two or more variables. The history of the study of the discontinuity points set of separately continuous functions begins with the classic works of Rene Baire and Henri Lebesgue at the end of the IXX century. Further development of these studies was carried out by many mathematicians and led to the emergence of the theory of separately continuous maps. Investigations of separately continuous functions began to be actively conducted at Chernivtsi University starting from the 80s of the XX century on the initiative and under the leadership of Volodymyr Maslyuchenko.

Despite the previously obtained results, there are not so many theorems that fully characterize the discontinuity points set of separately continuous functions on the product of spaces from a certain class. They give only a not far exit beyond the case of the product of metrizable spaces. This indicates that the further development of these investigations is relevant, because the problems of a complete description of the discontinuity points sets of separately continuous functions on the product of abstract spaces remain unsolved.

The thesis consists of an introduction, 6 chapters, conclusions, a list of used literature and two appendices. Chapters are divided into subsections, with the exception of the first chapter. Conclusions to each chapter are provided at the

end of the chapter starting from the second.

The introduction includes the relevance of the topic, the goal, the task of the dissertation, the research subject and the research object. Research methods, information on approval, publications are indicated in the introduction. The structure and content of the dissertation are described in the introduction.

The first chapter is devoted to an overview of research topics. This chapter provides historical information on the main stages of formation of the research topic. Moreover, it contains the main achievements, open questions and results on which the results from the next sections are based.

The second chapter is devoted to the formulation definitions of basic notions and some well-known results used in the dissertation. The chapter is divided into three subsections. Subsection 2.1 provides some basic definitions and properties that apply to the general theory of real functions, as well as such well-known theorems as Stone's theorem, Urysohn's lemma, and others. Subsection 2.2 contains the definition of the Stone-Cech compactification and some its properties. Subsection 2.3 contains the definitions and properties of the following notions: filters, P-filters, near coherence of filters.

The third chapter is devoted to the solution of a special inverse problem with asymmetric conditions on spaces. Subsection 3.1 is devoted to the introduction and the investigation of a new notion of regular set in a topological space. In particular, we prove in Proposition 3.1.8 that every closed nowhere dense subset of a metrizable space is regular. Subsection 3.2 is devoted to the study of an another new notion of bilaterally separable set. It is proved that every functionally closed bilaterally separable set is regular. A separately continuous function $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ with a given discontinuity points set $A \times B$, where A is a regular set in a topological space X and B is a functionally closed nowhere dense set in a topological space Y, is constructed in Subsection 3.3. In particular, we obtain Corollary 3.3.2, which generalizes all previously obtained solutions of the special inverse problem. The special inverse problem on the product of Stone-Cech compactifications $\beta\omega \times \beta\omega$ is investigated in Subsection 3.4. We obtain that the set ω^* is not a regular set in the space $\beta\omega$ and prove that there is no separately continuous function on the product $\beta\omega \times \beta\omega$ with the discontinuity points set $\omega^* \times \omega^*$.

In the fourth chapter we study the necessary and sufficient conditions for the existence of a separately continuous function on the product of n compact spaces with an one-point set of discontinuity. The results of this chapter generalize the results of V. Mykhaylyuk on separately continuous functions of two variables. The notions of a separately continuous function with respect to groups of variables and a strongly separately continuous function of many variables are considered in Subsection 4.1. The strong separate continuity of a function of two variables is equivalent to the separate continuity. But for functions of more variables, the notion of a strongly separately continuous function is stronger than the notion of a separately continuous function. In Subsection 4.2, we establish the necessity of non-isolation the corresponding points for the existence of a separately continuous and strongly separately continuous function with a given one-point set of discontinuity. Subsection 4.3 is devoted to the necessary and sufficient conditions for the existence of a separately continuous or strongly separately continuous function of many variables with a one-point set of discontinuity. The main result of this subsection and the chapter is Theorem 4.3.4. It states that the existence of a strongly separately continuous or separately continuous function $f : \prod\limits_{k=1}^{n} X_k \to [0,1]$ with $D(f) = \{(x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,n})\}$, where X_k is a compact Hausdorff space and $x_{0,k}$ is a non-isolated point in X_k for each $1 \leq k \leq n$, is equivalent to the fact that there exists a sequence $(U_m)_{m=1}^{\infty}$ of nonempty open sets U_m in the space $X = \prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ such that $U_m \to \mathrm{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,n})$.

The fifth chapter is devoted to obtaining the necessary and sufficient conditions for the existence of a strongly separately continuous function on the product of n arbitrary completely regular spaces with a given one-point G_δ-set of discontinuity points. The main result of this chapter generalizes the corresponding result of T. Banakh, O. Maslyuchenko, and V. Mykhaylyuk on separately continuous functions of two variables, which is formulated in terms of near coherence of P-filters. In subsection 5.1, we consider some properties of filters and P-filters from the set $\mathcal{F}$ of all filters on the set $\mathbb{N}$ which are invariant with respect to the inclusing of sets with finite difference. The main result of this subsection is the statement that the near coherence of arbitrary n P-filters is equivalent to the near coherence of arbitrary two P-filters. In Subsection 5.2, we introduce the notion of a strongly separately finite set and obtain some of its properties. In subsection 5.3, we investigate the joint continuity of strongly separately continuous functions on the product of special spaces $\mathbb{N}_u$ and obtain Theorem 5.3.1 which states that if P-filters $x_1, ..., x_n$ are not near coherent, then each strongly separately continuous function $f : \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{x_i} \to \mathbb{R}$ is continuous. This means that the near coherence of the filters is a necessary condition for the existence of a corresponding strongly separately continuous function with an one-point set of discontinuity. In Subsection 5.4, we study the existence of discontinuous strongly separately continuous functions on the product of spaces N_{x_k} and obtain that under certain conditions on filters $x_1, ..., x_n$ there exists a set $H \subset \mathbb{N}^n$ such that its characteristic function is strongly separately continuous and discontinuous at the point $(x_1, ..., x_n)$. In Subsection 5.5, we prove the main result of this chapter which states that the condition of near coherence of arbitrary two P-filters is necessary and sufficient for the existence of a strongly separately continuous function $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ with $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$, where $X_1, ..., X_n$ are arbitrary completely regular spaces, x_{i0} is a non-isolated G_δ-point in the space X_i for each $i \leq n$.

In the sixth chapter, the question of one-point set of discontinuity of separately continuous functions of n variables is studied, similar to the one in the fifth chapter for strongly separately continuous functions. In Subsection 6.1, we obtain that if there exists a separately continuous function $f : \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{x_i} \to \mathbb{R}$ with $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$, where $x_1, ..., x_n$ are P-filters from $\mathcal{F}$, then two near coherent filters can be chosen from $x_1, ..., x_n$. So, the existence two near coherent filters among P-filters $x_1, ..., x_n$ is necessary for the existence of a corresponding separately continuous function. In Subsection 6.2, we show that this condition is sufficient for the existence of a separately continuous $f : \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{N}_{x_i} \to \mathbb{R}$ with $D(f) = \{(x_1, ..., x_n)\}$, where $x_1, ..., x_n$ are filters from $\mathcal{F}$. Finally, in Subsection 6.3, we transfer the sufficiency of this condition to the case of the product of arbitrary completely regular spaces. We obtain the existence of a separately continuous function $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ with $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$, where $X_1, ..., X_n$ is completely regular spaces, x_{i0} is a non-isolated G_δ-point in the space X_i, if for some $1 \leq k < m \leq n$ there exists a separately continuous function $g : X_k \times X_m \to \mathbb{R}$ such that $D(g) = \{(x_{k0}, x_{m0})\}$. Next, we obtain Theorem 6.3.4 which is the main result of this chapter. It states that the existence of a separately continuous function $f : \prod\limits_{i=1}^{n} X_i \to \mathbb{R}$ with a given one-point the set of discontinuity $D(f) = \{(x_{10}, ..., x_{n0})\}$, where $(X_i)_{i=1}^{n}$ is a finite family of arbitrary completely regular spaces, $(x_i)_{i=1}^{n}$ is a finite family non-isolated G_δ-points in the corresponding spaces, is equivalent to the condition that we can choose two near coherent filters from arbitrary family of n P-filters from $\mathcal{F}$.

The main conclusions to the results of the thesis are given after the last chapter..

Keywords: function, map, topology, continuity, convergence, topological space, completely regular space, metric space, metrizable space, compactness, compact space, compactification, product, separately continuous function, convergent sequence.

Список публікацій здобувача

Наукові праці, в яких опубліковані основні наукові результати дисертації:

Наукові праці у виданнях, включених до переліку наукових фахових видань України:

1. Козловський, М. Характеризація одноточкових розривів нарізно неперервних функцій багатьох змінних, *Буковинський математичний журнал* **2024**, 12 (1), с. 63-73.

Наукові праці у періодичних наукових виданнях, проіндексованих у наукометричній базі даних Scopus:

1. Kozlovskyi, M.; Mykhaylyuk, V. Separately continuous functions with a given rectangular set of points of discontinuity, *European Journal of Mathematics* **2022**, 8 (Suppl 1), pp. 330–345. (*Особистий внесок автора: В.Михайлюку належить постановка задачі та ідея розгляду функції на добутку $\beta\omega$, основні результати роботи належать автору*)

2. Козловський, М. Одноточкові розриви нарізно неперервних функцій багатьох змінних на добутку компактних просторів. *Proceedings of the International Geometry Center* **2023**, 16(2), с. 105-115.

3. Kozlovskyi, M. Discontinuous strongly separately continuous function of several variable and near coherence of two P-filters, *Carpathian Mathematical Publications* **2024**, 16, pp. 469-483.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

1. Kozlovskyi, M. Regular sets and separately continuous functions. *Current trends in abstract and applied analysis*: матеріали міжнародної науко-

вої онлайн конференції, м. Івано-Франківськ, 12-15 травня 2022р. Івано-Франківськ, 2022, с. 43-44.

2. Kozlovskyi, M. The special inverse problem on the Cech-Stone compactification. *Прикладна математика та інформаційні технології*: матеріали міжнародної наукової конференції присвячена 60-річчю кафедри прикладної математики та інформаційних технологій, м. Чернівці, 22-24 вересня 2022р. Чернівці, 2022, с. 225.

3. Kozlovskyi, M. Separately continuous functions for the space with the regular subset. *Математика та інформаційні технології*: матеріали міжнародної наукової конференції присвяченної 55-річчю факультету математики та інформатики, м. Чернівці, 28-30 вересня 2023р. Чернівці, 2023, с. 77-78.

4. Kozlovskyi M. One-point discountinuity of separately continuous funcions of several variables. *V міжнародна конференція, присвячена 145-річчю з дня народження Ганса Гана*: матеріали міжнародної наукової конференції присвяченої 145-річчю з для народження Ганса Гана, м. Чернівці, 23-27 вересня 2024р. Чернівці, 2024, с. 152-153.