Міністерство освіти і науки України
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
Факультет математики та інформатики

ЗАТВЕРДЖЕНО
Голова приймальної комісії
Руслан БІЛОСКУРСЬКИЙ
__ ______________ 2024 р.

ПРОГРАМА
вступного іспиту до аспірантури зі спеціальності
111 Математика

ЗАТВЕРДЖЕНО
Вченою радою факультету
математики та інформатики
Голова Вченої ради
________Ольга МАРТИНЮК
(протокол №12 від 25 червня 2024 р.)

Чернівці – 2024

## ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Метою вступного фахового випробування є перевірка знань з математики і відбір вступників для зарахування на навчання в аспірантурі за спеціальністю 111 «Математика» при вступі на навчання на основі НРК7. Програма іспиту містить питання з математичного аналізу, комплексного аналізу, функціонального аналізу, рівнянь з частинними похідними, диференціальних рівнянь, теорії ймовірностей, лінійної алгебри, алгебри і теорії чисел, аналітичної геометрії, диференціальної геометрії і топології.

### Математичний аналіз

1. Функції однієї змінної: границя функції в точці; дослідження локальної поведінки функції; неперервні функції та їх основні властивості. Обернена функція та умови її існування.
2. Похідна та її застосування: означення та правила обчислення похідних; теореми про функції, що мають похідну; диференціал функції; похідні та диференціали старших порядків; формула Тейлора; дослідження функцій на екстремум.
3. Невизначений інтеграл: означення, властивості та методи інтегрування.
4. Визначений інтеграл: означення, основні властивості.
5. Числові ряди: означення збіжності; критерій Коші; критерій та ознаки збіжності рядів з невід'ємними членами; абсолютно і умовно збіжні ряди.
6. Функціональні ряди: означення, критерій та ознаки рівномірної збіжності; властивості рівномірно збіжних рядів; почленне інтегрування та диференціювання; степеневі ряди та їх основні властивості; розклад елементарних функцій у степеневі ряди.
7. Функції кількох змінних: границя в точці; неперервність; властивості неперервних функцій на компактах; частинні похідні; диференційовність; формула Тейлора; дослідження на екстремум; градієнт, похідна за напрямом; теорема про існування неявної функції.
8. Невласні інтеграли: означення, властивості, ознаки збіжності; рівномірна збіжність невласних інтегралів, залежних від параметра; властивості функцій, що визначаються невласними інтегралами (інтеграли, що залежать від параметра: неперервність, диференціювання та інтегрування по параметру).

9. Кратні інтеграли: означення, властивості, обчислення; невласні кратні інтеграли.
10. Криволінійні та поверхневі інтеграли: означення, властивості, обчислення; формули Гріна, Гауса-Остроградського і Стокса.
11. Ряди та інтеграл Фур'є: означення, властивості рядів Фур'є відносно ортонормованих систем функцій; ознаки збіжності тригонометричних рядів Фур'є; розклад функцій в тригонометричні ряди Фур'є; інтегральна формула Фур'є, перетворення Фур'є.

## Лінійна алгебра

1. Лінійні простори: означення, лінійна незалежність, базис, розмірність; евклідові та унітарні скінченновимірні простори; приклади.
2. Лінійні оператори у скінченновимірних просторах: означення, матричний опис; ядро і образ, ранг і дефект; простір лінійних операторів.
3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь: необхідна та достатня умова розв'язності (теорема Кронекера - Капеллі); теорема про структуру розв'язків. Формула для обчислення оберненої матриці.
4. Канонічна форма матриці лінійного оператора: жорданова форма матриці; знаходження функцій від оператора; теорема Гамільтона – Келі.
5. Спектральна теорія самоспряжених операторів: білінійна та квадратична форми оператора; теорема про існування спряженого оператора; самоспряжений оператор; матриці спряженого та самоспряженого оператора, їх властивості; власні числа та власні елементи самоспряженого оператора, їх властивості, спектральне зображення самоспряженого оператора; зведення квадратичної форми до канонічного вигляду.
6. Групи, підгрупи, кільця і поля. Приклади. Поняття фактор-групи.

## Аналітична геометрія

1. Вектори. Лінійні операції над векторами.
2. Скалярне, векторне та мішане множення векторів.
3. Види рівнянь прямої лінії на площині.
4. Види рівнянь прямої лінії в просторі.
5. Види рівнянь площини.
6. Взаємне розміщення прямих в просторі, заданих своїми канонічними рівняннями.
7. Канонічне рівняння еліпса, гіперболи і параболи. Директриси еліпса, гіперболи і параболи. Ексцентриситет.

## Алгебра і теорія чисел

1. Система лінійних рівнянь з n змінними. Розв'язок системи. Різні методи знаходження розв’язків системи: метод Гаусса, теорема Крамера, теорема Кронекера-Капеллі, матричний спосіб.
2. Фундаментальна система розв’язків однорідної системи лінійних рівнянь. Загальний розв’язок однорідної та неоднорідної системи рівнянь. Зв'язок між розв'язками неоднорідної та приєднаної однорідної систем лінійних рівнянь.
3. Комплексні числа: алгебраїчна та тригонометрична форми запису комплексного числа. Дії над комплексними числами в алгебраїчній та тригонометричній формах. Формула Муавра. Корінь натурального степеня з комплексного числа.
4. Многочлени від однієї змінної. Дії над ними. Теорема про ділення многочленів з остачею.
5. Дільники многочлена. Спільні дільники двох многочленів. Найбільший спільний дільник двох многочленів. Алгоритм Евкліда.
6. Корінь многочлена. Теорема Безу. Кратні корені.Схема Горнера та її застосування до знаходження значення многочлена та його похідних в точці, до розкладу многочлена за степенями (х-а).
7. Основна теорема алгебри про існування коренів многочлена від однієї змінної. Розклад многочлена на множники. Формули Вієта.
8. Квадратична форма. Канонічний та нормальний вигляди квадратичної форми. Закон інерції дійсних квадратичних форм.
9. Скінченновимірний лінійний простір. База простору. Зв’язок між різними базами.
10. Лінійний простір — означення та властивості. Приклади. Ізоморфізм лінійних просторів.
11. Лінійний оператор в лінійному просторі. Матриця лінійного оператора.
12. Евклідовий простір — означення та властивості. Ортонормовані бази, їх існування. Процес ортогоналізації.
13. Група, абелева група — означення та властивості. Приклади. Гомоморфізм та ізоморфізм груп.
14. Кільце, поле — означення та властивості. Приклади. Ізоморфізми кілець та полів.

## Функціональний аналіз та інтегральні рівняння

1. Міра множин: означення та властивості; міра Лебега на прямій і в просторі $R^n$, $n \geq 2$.
2. Вимірні функції: означення, основні властивості.
3. Інтеграл Лебега: означення, основні властивості; теореми про граничний перехід під знаком інтеграла; простори $L_p$, $p \geq 1$.

4. Метричні простори: означення, приклади, повнота, сепарабельність; принцип нерухомої точки та його застосування.
5. Банахові і гільбертові простори: означення, приклади, властивості норми і скалярного добутку.
6. Лінійні неперервні функціонали і оператори; означення, властивості, норма; обернені оператори.
7. Компактні множини і КО в банахових просторах: означення, властивості; теореми Фредгольма для операторних рівнянь 2-го роду з КО.
8. Резольвента і спектр оператора: означення, властивості, спектр компактних і самоспряжених операторів.
9. Лінійні інтегральні рівняння: метод послідовних наближень для рівнянь Вольтерри і Фредгольма; теореми Фредгольма; теорема Гільберта – Шмідта для рівнянь з симетричним ядром.
10. Узагальнені функції: означення, приклади; диференціювання; перетворення Фур'є.

### Аналітичні функції комплексної змінної

1. Означення та приклади аналітичних функцій.
2. Інтегральна теорема і формула Коші.
3. Розклад аналітичної функції в ряд Тейлора.
4. Ряд Лорана. Теорема Лорана. Класифікація особливих точок.
5. Лишки: означення; основна теорема; обчислення інтегралів з допомогою лишків.

### Звичайні диференціальні рівняння

1. Означення й основні поняття диференціальних рівнянь першого порядку. Простіші методи знаходження наближених розв’язків диференціальних рівнянь в нормальній формі.
2. Основні інтегровні типи диференціальних рівнянь першого порядку.
3. Диференціальні рівняння вищих порядків: основні поняття; базові типи диференціальних рівнянь, що допускають зниження порядку.
4. Лінійні диференціальні рівняння вищих порядків: фундаментальна система розв’язків; структура загального розв‘язку; методи Ейлера та Лагранжа інтегрування рівнянь; теорема про суперпозицію розв’язків неоднорідних рівнянь.
5. Нормальні системи диференціальних рівнянь: основні поняття; базові методи інтегрування. Розв’язування лінійних системи диференціальних рівнянь методом матриканта.

6. Задача Коші для диференціальних рівнянь і систем: постановка; геометричний та механічний зміст; теореми про достатні умови коректної розв'язності.
7. Особливі точки та особливі розв‘язки диференціальних рівнянь. Класифікація Пуанкаре.
8. Стійкість розв‘язків нормальних систем диференціальних рівнянь: основні поняття, метод функції Ляпунова дослідження на стійкість за першим наближенням.
9. Крайові задачі для диференціальних рівнянь: теореми існування, інтегральне зображення розв‘язку за допомогою функції Гріна; власні значення та власні функції однорідної крайової задачі для рівнянь Штурма-Ліувілля.

## Рівняння з частинними похідними

1. Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними першого порядку: основні поняття; метод характеристик; структура загального розв'язку; постановка та розв'язність задачі Коші.
2. Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними другого порядку: основні поняття; класифікація; зведення до канонічної форми; інтегрування.
3. Задача Коші для лінійних рівнянь довільного порядку в класах аналітичних функцій: теорема Ковалевської; методом Хольмгрена встановлення єдиності розв'язку.
4. Класичні рівняння математичної фізики: рівняння коливних процесів; рівняння тепло-дифузійних процесів; рівняння стаціонарних процесів.
5. Основні задачі для рівнянь математичної фізики: задача Коші; крайові задачі; початково-крайові задачі; поняття про коректність; приклад Адамара.
6. Розв'язування базових задач математичної фізики: метод Фур'є; метод інтегральних перетворень; метод розкладу за власними функціями.
7. Параболічні системи рівнянь з частинними похідними: основні види означень; класи єдиності та коректності задачі Коші.
8. Гіперболічні системи рівнянь з частинними похідними: основні види означень; класи єдиності та коректності задачі Коші.
9. Поняття про коректні системи рівнянь з частинними похідними за Петровським та за Шиловим. Умови розв'язності задачі Коші.

## Теорія ймовірностей

1. Класичне означення ймовірності. Аксіоматика Колмогорова теорії ймовірностей. Залежні та незалежні випадкові події. Умовна ймовірність. Формули множення ймовірностей. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.
2. Означення неперервної випадкової величини (НВВ). Функція та щільність розподілу НВВ, їх властивості.
3. Основні числові характеристики НВВ (математичне сподівання, дисперсія, мода, медіана, початкові та центральні моменти). Їх властивості.
4. Закон великих чисел. Нерівність Чебишова. Центральна гранична теорема.

## Диференціальна геометрія і топологія

1. Дотик кривих. Стичне коло.
2. Кривина лінії. Скрут. Обчислювальні формули для кривини та скруту.
3. Тригранник Френе. Формули Френе.
4. Перша квадратична форма поверхні та її застосування.
5. Друга квадратична форма поверхні та її застосування.
6. Властивості операторів замикання та внутрішності.
7. Аксіоми відокремності та зв'язок між ними.
8. Зв'язні топологічні простори.
9. Продовження неперервних функцій, лема Урисона.
10. Досконало нормальні простори і теорема Веденісова.

## Список літератури


1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.1. – К.: Либідь, 1993. – 319 с.

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз. Ч.2. – К.: Либідь, 1994. – 302 с.

2. Маслюченко О. В., Маслюченко В. К. Елементи математичного аналізу. Частина I. Числа, функції, границі і неперервність, Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича –Чернівці: Технодрук, 2021. 400 с

2. Дзядик В.К. Математичний аналіз. Т.1. – К.: Вища школа, 1995. – 495 с.

3. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 1. Метричні і нормовані простори. – Чернівці: ЧНУ, 2010. — 184 с.

4. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 2. Лінійні оператори і функціонали. – Чернівці: ЧНУ, 2010. — 191 с.

5. Маслюченко В.К. Лекції з функціонального аналізу. Ч. 3. Гільбертові простори. – Чернівці: ЧНУ, 2011. — 72 с.

6. Нагнибіда М.І. Основи комплексного аналізу. – Чернівці : Зелена Буковина, 2002. – 256 с.

7. Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заболоцький М.В, Скасків О.Б. Комплексний аналіз. Львів, Афіша, 2008.
8. Мельник Т. А. Комплексний аналіз : підручник. - К. : ВПЦ «Київський університет», 2015. - 192 с.
9. Самойленко А.М., Перестюк М.О., Парасюк І.О. Диференціальні рівняння. – К.; Либідь, 1994. – 360с.
10. Кривошия О.А., Перестюк М.О., Бурим В.М. Диференціальні та інтегральні рівняння.– К. : Либідь, 2004. – 408 с.
11. Івасишен С.Д. Основи класичної теорії рівнянь математичної фізики / С.Д. Івасишен, В.П. Лавренчук, Г.П. Івасюк, Н.В. Рева. – Чернівці: Родовід, 2015. – 358 с.
12. Вірченко Н.О. Основні методи розв'язування задач математичної фізики: навчальний посібник. – Київ: КПІ, 1997. – 370 с.
13. Літовченко В.А. Системи Шилова у просторах типи S і S`: Монографія. – Чернівці: ЧНУ, 2019. – 280 с.
14. Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, Ivasyshen, A.N. Kochubei. Birkh¨auser, Basel, 2004. (Ser. Operator Theory: Adv. and Appl. 152)
15. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т. 1.: Ймовірність. Теорія та комп'ютерна практика. – Чернівці: Золоті литаври, 2007. – 444 с.
16. Скасків О.Б. Теорія ймовірностей. Львів: Число, 2012.
17. Городецький В.В., Колісник Р.С., Сікора В.С. Курс лінійної алгебри в теоремах і задачах.Частина перша: Навчальний посібник.— Чернівці, 2018.— 336 с.
18. Колісник Р.С., Сікора В.С., Шевчук Н.М. Лінійна алгебра в теоремах і задачах. Ч. 1: Навчальний посібник. – Чернівці: Книги – XXI, 2011. – 292 с.
19. Завало С.Т. Курс алгебри. – К.: Вища школа, 1985. – 504 с.
20. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Курс вищої алгебри. – К.: Рад. шк., 1964. – 511 с.
21. Карлова О. Вступ до загальної топології. Частина І. Навчальний посібник, Чернівці, Технодрук, 108 с.
22. Engelking R. General topology. Heldermann-Verlag-Berlin, 1989.
23. Городецький В. В., Житарюк І. В., Мартинюк О. В. Основи топології в теоремах і задачах. – Чернівці: Прут, 2011. – 544 с.
24. Кованцов М.І. Диференціальна геометрія. – К.: Вища школа, 1973. – 276 с.

25. Городецький В.В., Мартинюк О.В. Диференціальна геометрія в теоремах і задачах. –Чернівці: Рута, 2006.– 400 с.
26. Костарчук В.М., Хацет Б.І. Курс вищої алгебри. – К.: Рад. шк., 1964. – 511 с.
27. Бородін О. І. Теорія чисел. – К.: Вища школа, 1970. – 274 с.
28. Безущак О.О., Ганюшкін О.Г. Елементи теорії чисел: Навч. посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2003. – 202 с.
29. Завало С. Т., Левіщенко С. С., Пилаєв В. В., Рокицький І. О. Алгебра і теорія чисел. Практикум в 2-х частинах. – К.: Вища школа, 1986. – Ч. 1. – 264 с.
30. Основи аналітичної геометрії в теоремах і задачах / навч. посіб.: **В.В. Городецький, С.Б. Боднарук, Ж.І. Довгей, В.С. Лучко**. – Чернівці: – Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2020. – 384 с. https://drive.google.com/file/d/1fFcSXo81bQPukhZeV41Qef_R7eQDwxyK/view?usp=sharing
31. Городецький В.В., Боднарук С.Б., Довгей Ж.І. Аналітична геометрія. Елементи векторної алгебри: навчальний посібник у 4-х част., – Ч. 2, Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2012. –100 с.
32. Бокало Б.М., Бридун В.Л., Гуран І.Й. Навчально-методичний посібник з аналітичної геометрії. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008, – 262 с.

## Критерії оцінювання вступного випробування до аспірантури зі спеціальності 111 «Математика

Вступне фахове випробування проводиться в тестовій формі за наступним порядком: до кожного завдання пропонується 4 варіанти відповідей (дистрактори), з яких лише один правильний. Завдання вважається виконаним неправильно, якщо: а) позначено неправильну відповідь; б) позначено два або більше варіантів відповіді, навіть якщо серед них є правильна відповідь; в) відповідь не позначено взагалі.

Фаховий вступний іспит відбувається згідно з програмою вступу до аспірантури зі спеціальності 111 – Математика, затвердженою Вченою радою факультету математики та інформатики від 25 червня 2024 р., протокол № 12.

Вступний іспит проводиться очно у тестовому форматі. Тест містить 20 питань. Правильна відповідь на кожне питання оцінюється в 6 балів, неправильна – 0 балів. Час тестування 120 хвилин.

Загальна кількість балів за вступне випробування одержується як сума базових 80 балів і кількості балів, одержаних за відповіді абітурієнта на тестові питання. Таким чином, загальна кількість балів знаходиться в межах 80-200 балів. Обчислення здійснюється автоматично системою.

Вступний іспит вважається складеним за умови отримання абітурієнтом загальної кількості балів не менше, ніж 120 балів, що відповідає нижній межі оцінки задовільного рівня.

Рішення про зарахування вступника на навчання приймається Приймальною комісією Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича відповідно до встановленої університету ліцензії за набраним конкурсним балом згідно з Правилами прийому до аспірантури Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича на здобуття вищої освіти ступеня доктора філософії у 2024 році, затвердженого Вченою радою Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича 28 червня 2024 року, протокол № 10.